

1. Какие коэффициенты будут при ab^9 и a^8b^2 в многочлене $(a + b)^{10}$ после раскрытия скобок и приведения подобных?
2. Найти коэффициент при ab^2c^3 в многочлене $(a + b + c)^6$.
3. Найти наибольший коэффициент в многочлене $(a + b)^{10}$.
(Продолжение) Найти сумму всех его коэффициентов.
4. Разложить на множители $a^2 - b^2$, $a^3 - b^3$, $a^4 - b^4$, $a^5 - b^5$, $a^6 - b^6$.
5. Разложить на множители $a^3 + b^3$, $a^4 + b^4$, $a^5 + b^5$, $a^6 + b^6$.
6. Разложить на множители $(x + y)^{10} - z^{12}$.
7. Перемножить $(1 - x)(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{19})$.
8. Найти $(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{19})$ при $x = 3$.
9. Доказать, что $x^2 + x + 1 > 0$ при любом x .
10. Доказать, что $x^2 + xy + y^2 = 0$, только если $x = 0$ и $y = 0$.
11. Найти наибольший коэффициент в многочлене $(a + 2b)^{10}$.
(Продолжение) Найти сумму всех его коэффициентов.
12. Найти сумму всех коэффициентов в $(a + b - c)^{10}$.
(Продолжение) Найти сумму коэффициентов при одночленах, не содержащих a .
(Продолжение) Найти сумму коэффициентов при одночленах, содержащих b .
13. Перемножить $(1 - x)^2(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + 20x^{19})$.
14. Найти $(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + 20x^{19})$ при $x = 2$.
15. Может ли $x^2 + 5xy + 7y^2$ быть отрицательным?
16. Может ли $2x^2 + 5xy + 3y^2$ быть отрицательным?
17. Доказать, что многочлен $x^2y^2 + x^2 - 2xy + 1$ положителен при любых x и y . Может ли он быть меньше 0,001?
18. Доказать, что если $x + y + z = 0$, то $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$.
(Продолжение) Разложить на множители многочлен $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.
19. Доказать, что если $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$, то либо все числа x , y и z равны, либо их сумма равна нулю.
20. Разложить на множители многочлен $x^5 + x + 1$.
21. Можно ли разложить на множители многочлен $x^2 + y^2 - 1$ (ни один из множителей не должен быть константой)?
22. Может ли в произведении двух многочленов быть меньше одночленов, чем в каждом из них? (Подобные члены считаются за один.)

1. Многочлен $P(x)$ имеет степень 5, а многочлен $Q(x)$ имеет степень 7. Что можно сказать про степени многочленов $P(x) + Q(x)$ и $P(x)Q(x)$?
2. Тот же вопрос, если степени обоих многочленов равны 7.
3. Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ имеют старшие коэффициенты 5 и 7. Что можно сказать про старшие коэффициенты многочленов $P(x) + Q(x)$ и $P(x)Q(x)$?
4. Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ имеют свободные члены 5 и 7. Что можно сказать про свободные члены многочленов $P(x) + Q(x)$ и $P(x)Q(x)$?
5. Каждый из многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ содержит по два (ненулевых) члена. Сколько ненулевых членов может быть в их произведении? Указать все варианты.
7. Число $P(0)$ — свободный член многочлена P . Записать аналогичным образом сумму коэффициентов многочлена P .
8. Сумма коэффициентов многочлена $P(x)$ равна 5, а сумма коэффициентов многочлена $Q(x)$ равна 7. Что можно сказать про сумму коэффициентов многочленов $P(x) + Q(x)$ и $P(x)Q(x)$?
9. Произвольный многочлен $P(x)$ умножили на $x - 1$. Могут ли у произведения все коэффициенты быть положительными?
10. У многочлена $P(x)$ сумма коэффициентов при чётных степенях равна сумме коэффициентов при нечётных степенях. Многочлен $Q(x)$ также обладает таким свойством. Можно ли утверждать, что это свойство выполнено для многочленов $P(x) + Q(x)$ и $P(x)Q(x)$? А если про коэффициенты многочлена Q ничего не известно?
10. Найти многочлен второй степени, имеющий корни 1 и 2.
11. Найти многочлен третьей степени, имеющий корни 1, 2 и 3.

12. Числа a и b таковы, что многочлен $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ имеет корень 2. Найти один из корней многочлена $x^3 + bx^2 + ax + 1$.

13. Доказать, что корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ при $a \neq 0$ и $c \neq 0$ можно найти по формуле

$$x_{12} = \frac{2c}{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

Применима ли эта формула, если одно из чисел a и c равно нулю?

14. Найти многочлен $P(x)$, для которого $P(n+1) - P(n) = n$ при всех n . Как с его помощью вычислить сумму $1 + 2 + 3 + \dots + n$?

15. Найти многочлен $P(x)$, для которого $P(x+1) - P(x) = x^2$.

16. Вычислить сумму $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$.

17. Обозначим через $P(Q(x))$ многочлен, который получится, если в $P(x)$ вместо x подставить $Q(x)$. (Например, если $P(x) = x^2$, а $Q(x) = x + 1$, то $P(Q(x)) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$, а $Q(P(x)) = x^2 + 1$. Каковы степени многочленов $P(Q(x))$ и $Q(P(x))$, если степени многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ равны m и n ?

18. Многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ имеют целые коэффициенты, причём каждый из них имеет хотя бы один нечётный коэффициент. Доказать, что у произведения $P(x)Q(x)$ также есть хотя бы один нечётный коэффициент.

19. Найти коэффициенты при x^2 , x и 1 (свободный член) многочлена

$$(\dots((x-2)^2 - 2)^2 - \dots - 2)^2$$

(10 скобок).

20. Доказать, что в произведении $(1 - x + x^2 - x^3 + \dots + x^{10})(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{10})$ после раскрытия скобок и приведения подобных членов не останется нечётных степеней x .

21. Все коэффициенты многочлена — целые числа в диапазоне от -9 до 9 . Доказать, что он не может иметь корня, большего 10.

22. Многочлен $P(x)$ принимает только неотрицательные значения. Доказать, что его степень чётна.

23. Для произвольного многочлена $P(x)$ рассмотрим последовательность $P(0), P(1), P(2), \dots$ его значений в целых точках. Составим последовательность разностей, написав под каждым двумя числами их разность (получится последовательность $P(1) - P(0), P(2) - P(1), \dots$). Аналогичным образом составим последовательность вторых разностей и т.п. Доказать, что рано или поздно получится последовательность из одних нулей.

24. Доказать тождество $P(x) - 2P(x+1) + P(x+2) = 0$ для любого многочлена $P(x)$ первой степени.

25. Доказать тождество $P(x) - 3P(x+1) + 3P(x+2) - P(x+3) = 0$ для любого многочлена $P(x)$ степени не выше 2.

26. Сформулировать и доказать аналогичное тождество для многочленов бóльших степеней.

Деление с остатком

Рассмотрим *рациональные дроби с одной переменной*, то есть отношения многочленов $P(x)/Q(x)$. Как и обычные дроби, они делятся на правильные и неправильные. Правильными считаются те, у которых степень числителя меньше степени знаменателя, неправильными — остальные.

Неправильную дробь можно преобразовать в сумму многочлена и правильной дроби. Например,

$$\frac{x^2}{x-1} = \frac{x^2-1}{x-1} + \frac{1}{x-1} = x+1 + \frac{1}{x-1}$$

1. Выполнить такое преобразование для дроби $x^2/(x-2)$.

... для дроби $x^3/(x-1)$.

... для дроби $x^4/(x-1)$.

... для дроби $x^4/(x+1)$.

... для дроби $x^4/(x+2)$.

... для дроби $x^3/(x^2-1)$.

...для дроби $x^3/(x^2 + x)$.

...для дроби $x^3/(2x + 3)$.

...для дроби $x^{10}/(x + 2)$.

...для дроби $x^{10}/(x^2 + 2)$.

2. Степень делимого равна 100, степень делителя равна 43. Какими могут быть степени частного и остатка?

3. Как изменятся частное и остаток, если делимое и делитель умножить на $(x - 1)$?

4. Доказать, что деление многочленов с остатком всегда выполнимо, и притом единственным образом.

5. Какой остаток получится, если делить $x^{1000} - 1$ на $x^{17} - 1$?

6. Многочлен $P(x)$ даёт остаток $x + 7$ при делении на $x^2 - 1$. Какой остаток даст он при делении на $x + 1$?

7. При каких n и k многочлен $x^n - 1$ делится на многочлен $x^k - 1$ без остатка?

8. Найти остаток от деления $(x^2 + x + 1)^{100}$ на $x^2 + 1$.

9. Найти остаток от деления x^{57} на $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

10. Придумать многочлен, который при делении на $x^2 + 1$ даёт остаток $x + 1$, а при делении на $x^2 + 2$ даёт остаток $x - 1$.

11. Все коэффициенты делимого и делителя — целые. Можно ли утверждать, что все коэффициенты частного и остатка — целые?

12. Все коэффициенты делимого и делителя — рациональные. Можно ли утверждать, что все коэффициенты частного и остатка — рациональные?

13. При делении многочлена $P(x)$ на $x^2 - 1$ был получен остаток $x + 1$, а при делении многочлена $Q(x)$ — остаток $x - 1$. Какой остаток будет при делении многочленов $P(x) + Q(x)$ и $P(x)Q(x)$ при делении на $x^2 - 1$?

14. При делении многочлена $P(x)$ на $x^2 + 1$ получился остаток $a + bx$ (здесь a и b — некоторые числа); при делении $Q(x)$ получился остаток $c + dx$. Какой остаток будет при делении на $x^2 + 1$ многочленов $P(x) + Q(x)$ и $P(x)Q(x)$?

15. Делится ли многочлен $x^{100} + 3x^{70} - 5$ на многочлен $x^5 + x^3 - 2$ без остатка?

1. Доказать, что остаток при делении многочлена $P(x)$ на двучлен $x - a$ (где a — некоторое число), равен $P(a)$.

2. Как вычислить значение многочлена степени n с заданными коэффициентами в заданной точке x , сделав не более n операций умножения?

3. Доказать, что многочлен $P(x)$ делится нацело на двучлен $x - a$ (здесь a — некоторое число) в том и только том случае, когда a — корень многочлена P , то есть когда $P(a) = 0$.

4. Известно, что числа a и b являются корнями многочлена $P(x)$, причём $a \neq b$. Доказать, что $P(x)$ делится на $(x - a)(x - b)$.

5. Доказать, что многочлен степени n не может иметь более n различных корней.

6. Известно, что многочлен $P(x)$ даёт при делении на $(x - 1)$ остаток 3, а при делении на $(x + 1)$ — остаток 5. Найти остаток от деления $P(x)$ на $(x^2 - 1)$.

7. Найти числа a и b , если известно, что многочлен $x^{100} + x^{99} + ax + b$ делится на $x^2 - 1$.

8. График многочлена $P(x)$ симметричен относительно оси ординат. Доказать, что многочлен $P(x)$ не содержит нечётных степеней (коэффициенты при них равны 0).

9. Сформулировать и доказать аналогичное утверждение для многочленов, не содержащих чётных степеней.

10. Какое максимальное число точек пересечения могут иметь графики $y = P(x)$ и $y = Q(x)$, если степени многочленов P и Q равны соответственно p и q ?

11. Какое максимальное число точек пересечения могут иметь графики $y = P(x)$ и $x = Q(y)$, если степени многочленов P и Q равны соответственно p и q ?

12. Найти многочлен степени 3, если известно, что он имеет корни 1 и 2, а старший коэффициент и свободный член равны 1.

13. Доказать, что через любые три точки с различными абсциссами проходит единственный график квадратного трёхчлена ($y = ax^2 + bx + c$; старший коэффициент может быть равен 0).

14. Многочлен с действительными коэффициентами имеет комплексный корень $1 + i$. Доказать, что он делится на многочлен $x^2 - 2x + 2$.

15. Доказать, что многочлены $x^5 + 5x + 2$ и $x^5 + 3x - 3$ не имеют общих корней.

16. Многочлены $x^4 + 4x^3 - x^2 - 2x - 5$ и $x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 4x - 10$ имеют общий корень. Найти его.

Говорят, что число a является для многочлена $P(x)$ *корнем кратности не менее k* , если $P(x)$ делится без остатка на $(x - a)^k$. Максимальное такое k называют *кратностью* корня.

17. Доказать, что если для многочлена $P(x)$ число α является корнем кратности не менее 2, а число β является корнем, то $P(x)$ делится без остатка на $(x - \alpha)^2(x - \beta)$. [Решение этой и следующей задач упрощается, если пользоваться однозначностью разложения на множители для многочленов, но можно без этого обойтись.]

18. Доказать, что если для многочлена $P(x)$ число α является корнем кратности не менее k , а число β является корнем кратности не менее l , то $P(x)$ делится на $(x - \alpha)^k(x - \beta)^l$.

19. Доказать, что число корней многочлена, если каждый считать столько раз, какова его кратность, не превосходит степени многочлена.

20. Многочлен $P(x) = x^2 + px + q$ имеет два различных корня α и β .

Выразить p и q через эти корни (*формулы Виета* для квадратного трёхчлена).

21. Составить квадратное уравнение, корнями которого были бы числа α^2 и β^2 .

22. Многочлен $P(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ имеет три различных корня α , β и γ .

Выразить p , q и r через эти корни (*формулы Виета*).

Выразить $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ через p , q и r .

Составить кубическое уравнение, корнями которого были бы числа α^2 , β^2 и γ^2 .

23. Прямая пересекает график $y = x^3$ в трёх точках. Две из них имеют абсциссы a и b . Найти абсциссу третьей точки. (Как сделать это с помощью формул Виета?)

24. Кубическое уравнение $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ с целыми коэффициентами имеет три корня α , β и γ . Доказать, что число $\alpha^n + \beta^n + \gamma^n$ — целое при любом $n = 1, 2, 3, \dots$

25. Как выглядят формулы Виета для многочленов высших степеней?

26. Остатки от деления многочлена $P(x)$ на $(x - a)$, $(x - b)$ и $(x - c)$ равны соответственно a^2 , b^2 и c^2 . Найти остаток от деления этого многочлена на $(x - a)(x - b)(x - c)$.

27. Доказать, что любой многочлен степени не выше 3 однозначно представляется в виде $a + b(x - 1) + c(x - 1)^2 + d(x - 1)^3$

28. Доказать, что любой многочлен степени не выше 3 однозначно представляется в виде $a + b(x - 1) + c(x - 1)(x - 2) + d(x - 1)(x - 2)(x - 3)$.

29. Указать многочлен $P(x)$, для которого $P(1) = P(2) = P(3) = 0$ и $P(4) = 1$. Какова наименьшая возможная степень такого многочлена?

30. Доказать, что для любых чисел a, b, c, d можно найти многочлен степени не выше 3, для которого $P(0) = a$, $P(1) = b$, $P(2) = c$ и $P(3) = d$.

31. Пусть $x_1, \dots, x_n$ — различные числа. Доказать, что для любых чисел $y_1, \dots, y_n$ существует единственный многочлен $P(x)$ степени меньше n , для которого $P(x_1) = y_1$, $P(x_2) = y_2, \dots$, $P(x_n) = y_n$.

1. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами имеет целый корень a . Доказать, что его свободный член делится на a .

2. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами имеет два целых корня a и b . Доказать, что его свободный член делится на ab .

3. Существует ли многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами, для которого $P(7) = 5$, а $P(11) = 7$?

4. Доказать, что многочлен с целыми коэффициентами, старший коэффициент которого равен 1, не имеет рациональных, но не целых корней.

5. Доказать, что квадратный корень из целого числа либо целый, либо иррациональный.

6. Тот же вопрос для корня произвольной целой положительной степени.

7. Решить уравнение $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$.

8. Несократимая дробь $\alpha = p/q$ является корнем многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами. Доказать, что p является делителем его свободного члена, а q — делителем старшего коэффициента.

(Продолжение) Доказать, что многочлен $P(x)$ в этом случае можно представить в виде $P(x) = (qx - p)R(x)$, где $R(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами.

9. Указать многочлен с целыми коэффициентами, который имеет корень $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.
10. Доказать, что число $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ иррационально.
11. Доказать, что число $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ иррационально.
12. Доказать, что если число $2 + \sqrt{3}$ является корнем многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами, то число $2 - \sqrt{3}$ также является его корнем, и многочлен $P(x)$ делится без остатка на многочлен $x^2 - 4x + 1$.
13. Доказать, что если число $\sqrt[3]{2}$ является корнем многочлена с целыми коэффициентами, то этот многочлен делится без остатка на многочлен $x^3 - 2$.
14. Известно, что многочлен $P(x)$ принимает целые значения при всех целых x . Можно ли утверждать, что он имеет целые коэффициенты?
15. При каких a, b и c квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ принимает целые значения при всех целых x ?
16. Дано целое $k \geq 0$. Указать многочлен $P(x)$ наименьшей степени, для которого $P(1) = P(2) = \dots = P(k-1) = 0$, а $P(k) = 1$.
17. Как связан этот многочлен (будем обозначать его $P_k(x)$) с биномиальными коэффициентами?
18. Доказать, что многочлен $P_k(x)$ принимает целые значения во всех целых точках.
19. Пусть $Q(x)$ — произвольный многочлен, который принимает целые значения во всех целых точках. Доказать, что его можно представить в виде $c_0 + c_1 P_1(x) + \dots + c_k P_k(x)$ при некотором k и некоторых целых $c_1, \dots, c_k$.
-